# Aufgabe 41

$$J = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}, \quad S_A = \begin{pmatrix} A & \\ & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}, \quad T_B = \begin{pmatrix} E_n & B \\ & E_n \end{pmatrix},$$

mit $A \in \mathrm{GL}(n,K), B \in \mathrm{Sym}_n(K)$, d.h. $B = {}^tB$.

**zu zeigen:** $J, S_A$ und $T_B$ erzeugen $\mathrm{Sp}(2n,K)$.

**Beweis:**

Ich zeige, daß ich eine beliebige Matrix $M \in \mathrm{Sp}(2n,K)$ durch Multiplikation mit den obenstehenden erzeugenden Standardmatrizen in eine dieser Standardmatrizen, nämlich $T_B$, umwandeln kann. Der Rückschluß zeigt dann, daß alle Matrizen aus $\mathrm{Sp}(2n,K)$ durch Multiplikation von diesen Standardmatrizen erzeugt werden.

Sei also $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n,K)$.

Aus der definierenden Bedingung für $\mathrm{Sp}(2n,K)$ folgen die auch bereits aus der Vorlesung bekannten Bedingungen an $A, B, C, D$:

$$ {}^tAD - {}^tCB = E_n, \quad {}^tAC - {}^tCA = 0, \quad {}^tBD - {}^tDB = 0. \tag{1}$$

Ich multipliziere zuerst $M$ von links mit einem $S_V$ und von rechts mit einem $S_{V'}$, und erhalte

$$S_V M S_{V'} = \begin{pmatrix} V & \\ & {}^tV^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V' & \\ & {}^tV'^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} VA & VB \\ {}^tV^{-1}C & {}^tV^{-1}D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V' & \\ & {}^tV'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} VAV' & VB{}^tV'^{-1} \\ {}^tV^{-1}CV' & {}^tV^{-1}D{}^tV'^{-1} \end{pmatrix}.$$

Es wurde bereits in der Aufgabenstellung darauf hingewiesen, daß ein Resultat der Linearen Algebra besagt, daß man durch geeignete Wahl von $V$ und $V'$ erreichen kann, daß das Produkt $VAV'$ eine Diagonalmatrix $D_p, p \leq n$, wird, also eine Diagonalmatrix der Form

$$VAV' = \begin{pmatrix} E_p & \\ & \end{pmatrix}.$$

Ich gehe nun davon aus, daß ich $M$ mit solchen geeigneten Matrizen $S_V$ und $S_{V'}$ multipliziert habe, und untersuche nun nur noch Matrizen $M$ mit dieser Gestalt, wo die Teilmatrix $A$ bereits die Form $D_p$ hat.

Ich unterteile $M$ nun noch feiner:

$$M = \begin{pmatrix} E_p & & B_{11} & B_{12} \\ & & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}.$$

Hierbei sollen die Teilmatrizen $B_{11}, C_{11}, D_{11}$ auch $p \times p$-Matrizen sein, die anderen Teilmatrizen haben entsprechende Größe.

Aus (1) folgt sofort, daß $C_{11}$ symmetrisch sein muß: $C_{11} = {}^tC_{11}$, und weiterhin $C_{12} = 0$. Es muß $\det C_{22} \neq 0$ sein, sonst hätten wir linear abhängige Spalten und $\det M = 0$, dann könnte M aber nicht die Bedingungsgleichung erfüllen, $M \notin \mathrm{Sp}(2n, K)$.

Jetzt multipliziere ich $M$ von links mit $T_{\alpha E_n}$:

$$MT_{\alpha E_n} = \begin{pmatrix} E_n & \alpha E_n \\ & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

ich betrachte nur die linke obere Blockmatrix: $A$ wird zu $A + \alpha C$, somit

$$A + \alpha C = \begin{pmatrix} E_p + \alpha C_{11} & \\ \alpha C_{21} & \alpha C_{22} \end{pmatrix},$$

und ich kann den Parameter $\alpha$ so wählen, daß $\det(A + \alpha C) \neq 0$.

Dank dieser Umformungen kann ich nun o.B.d.A. $\det A \neq 0$ voraussetzen, und ich kann mittels der anfänglich gezeigten Anmultiplikation $p = n$ erreichen, also $A = E_n$ erreichen.

$C$ ist dann wegen (1) symmetrisch.

Ich multipliziere von links mit

$$J^{-1} T_C J = \begin{pmatrix} & -E_n \\ E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & C \\ & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & -E_n \\ E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & \\ -C & E_n \end{pmatrix}$$

und erhalte

$$\begin{pmatrix} E_n & \\ -C & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & \\ -C & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_n & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Aus (1) (erste Gleichung) erhalte ich $D = E_n$ und aus der dritten Gleichung in (1) ergibt sich die Symmetrie von $B$: $B = {}^tB$.

Nun haben wir also aus einer beliebigen Matrix $M \in \mathrm{Sp}(2n, K)$ eine Matrix $T_B$ konstruiert, die zu den erzeugenden Matrizen gehört, indem wir stets nur mit den Standardmatrizen multipliziert haben.

Damit ist nachgewiesen, daß $\mathrm{Sp}(2n, K)$ von den angegebenen Matrizen $J, S_A$ und $T_B$ erzeugt wird. ■

## Aufgabe 42

$$\mathfrak{H}_n := \{Z \in M_n(\mathbb{C}), Z = {}^tZ, \mathrm{Im}Z \text{ positiv definit}\}$$

$$G = \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) : {}^tg \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}\}$$

Es ist eine Abbildung definiert:

$$\left(g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, Z\right) \mapsto (AZ+B)(CZ+D)^{-1} =: g(Z).$$

Zu zeigen ist, daß diese Abbildung eine Operation auf $\mathfrak{H}_n$ ist.

Sei also $Z \in \mathfrak{H}_n$, bezeichne $Z^* := {}^t\overline{Z}$. Ich benutze die Schreibweise $M > 0$ für $M$ positiv definit, dies sollte zu keinen Verwechslungen führen, sofern ich diese Schreibweise auf Matrizen beziehe.

Sei also $Z \in \mathfrak{H}_n$, dann muß $Z$ symmetrisch sein:

$$Z = {}^tZ \Leftrightarrow {}^tZ - Z = 0 \Leftrightarrow ({}^tZ\ E_n) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

Außerdem muß $\mathrm{Im}(Z)$ positiv definit sein, das bedeutet

$$\mathrm{Im}(Z) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z}) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(Z - Z^*) > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2i}(Z^*\ E_n) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} > 0 \tag{3}$$

Sei nun $g(Z) := EF^{-1}$, also $E := AZ+B$ und $F := CZ+D$ bzw. schreibe ich

$$g\begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AZ+B \\ CZ+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \tag{4}$$

Dann ist nach (4) und (2) und wegen $g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$

$$({}^tE\ {}^tF) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = ({}^tZ\ E_n){}^tg \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} =$$

$$= ({}^tZ\ E_n) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Weiterhin ist auch nach (4) und (3) und wegen $g \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$

$$-\frac{1}{2i}(E^* \; F^*) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = -\frac{1}{2i}(Z^* \; E_n)^t g \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{2i}(Z^* \; E_n) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} > 0. \tag{6}$$

Ich multipliziere (5) links aus:

$$0 = ({}^tE \; {}^tF) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = ({}^tE \; {}^tF) \begin{pmatrix} F \\ -E \end{pmatrix} = {}^tEF - {}^tFE$$

$$\Rightarrow \quad {}^tEF = {}^tFE. \tag{7}$$

Nun multipliziere ich (6) links aus:

$$-\frac{1}{2i}(E^* \; F^*) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = -\frac{1}{2i}(E^* \; F^*) \begin{pmatrix} F \\ -E \end{pmatrix} = -\frac{1}{2i}(E^*F - F^*E))$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2i}(E^*F - F^*E) > 0 \tag{8}$$

Ich muß zeigen, daß $CZ + D = F$ invertierbar ist. Angenommen, $v$ wäre eine Lösung der Gleichung $Fv = 0$

$$\Rightarrow v^*F^* = 0 \Rightarrow v^*(E^*F - F^*E)v = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow F \text{ ist invertierbar.}$$

Aus (7) folgt, daß $EF^{-1}$ symmetrisch ist, und aus (8) erhalte ich

$$-\frac{1}{2i}F^*\big((F^{-1})^*E^* - EF^{-1}\big)F > 0,$$

$$-\frac{1}{2i}(EF^{-1} - (EF^{-1})^*) > 0$$

$\Rightarrow \Im(EF^{-1})$ ist positiv definit.

Damit ist nachgewiesen, daß das Bild der gegebenen Abbildung wieder in $\mathfrak{H}_n$ liegt.

Die Wirkung des Einselementes von $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ auf ein Element $Z \in \mathfrak{H}_n$:

$$E_{2n}(Z) = \begin{pmatrix} E_n & \\ & E_n \end{pmatrix}(Z) = (E_n Z + 0)(0Z + E_n)^{-1} = Z.$$

Seien $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), Z \in \mathfrak{H}_n$:

$$g(h(Z)) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}(Z)\right) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\big((A'Z+B')(C'Z+D')^{-1}\big)$$

$$= (A(A'Z + B')(C'Z + D')^{-1} + B)(C(A'Z + B')(C'Z + D')^{-1} + D)^{-1}$$

$$= \big(A(A'Z+B')+B(C'Z+D')\big)(C'Z+D')^{-1}\big(C(A'Z+B')(C'Z+D')^{-1}+D\big)^{-1}$$

$$= \big(A(A'Z+B')+B(C'Z+D')\big)(C'Z+D')^{-1}\big((C(A'Z+B')+D(C'Z+D'))(C'Z+D')^{-1}\big)^{-1}$$

$$= \big(A(A'Z+B')+B(C'Z+D')\big)(C'Z+D')^{-1}(C'Z+D')\big(C(A'Z+B')+D(C'Z+D')\big)^{-1}$$

$$= \big(A(A'Z + B') + B(C'Z + D')\big)\big(C(A'Z + B') + D(C'Z + D')\big)^{-1}$$

$$= \big((AA' + BC')Z + AB' + BD'\big)\big(C(A'Z + B') + D(C'Z + D')\big)^{-1}$$

$$= \big((AA' + BC')Z + AB' + BD'\big)\big((CA' + DC')Z + CB' + DD'\big)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}(Z)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}\right)(Z)$$

$$= (gh)(Z).$$

Es ist gezeigt, daß durch die gegebene Abbildung eine Operation auf $\mathfrak{H}_n$ definiert wird. ∎

## Aufgabe 43

**a)** zu zeigen: $\mathrm{SU}(1,1) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

**Definition:**

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) : {}^t\overline{A} D_{1,1} A = D_{1,1} \wedge \det A = 1 \right\}$$

mit

$$D_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{a} & -\overline{c} \\ \overline{b} & -\overline{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{a}a - \overline{c}c & \overline{a}b - \overline{c}d \\ \overline{b}a - \overline{d}c & \overline{b}b - \overline{d}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} |a|^2 - |c|^2 & \overline{a}b - \overline{c}d \\ a\overline{b} - c\overline{d} & |b|^2 - |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Ich entnehme aus (9) die Bedingung

$$0 = \overline{a}b - \overline{c}d = a(\overline{a}b - \overline{c}d) = |a|^2 b - \overline{c}ad = |a|^2 b - \overline{c}(1 + ac)$$

(wegen $\det A = ad - bc = 1$)

$$= (|a|^2 - |c|^2)b - \overline{c} = b - \overline{c} \quad \big(\text{wegen } (9)\big)$$

$$\Rightarrow b = \overline{c} \tag{10}$$

Analog wieder aus (9), diesmal multipliziere ich mit $c$:

$$0 = \overline{a}b - \overline{c}d = c(\overline{a}b - \overline{c}d) = \overline{a}bc - |c|^2 d = \overline{a}(ad-1) - |c|^2 d$$

(wegen $\det A = ad - bc = 1$)

$$= (|a|^2 - |c|^2)d - \overline{a} = d - \overline{a} \quad \big(\text{wegen } (9)\big)$$

$$\Rightarrow d = \overline{a} \tag{11}$$

Aus (10) und (11) erhalte ich

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{SU}(1,1) = \left\{ A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \wedge |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \tag{12}$$

Nun zeige ich die Isomorphie von $\mathrm{SU}(1,1)$ und $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, dazu zeige ich zunächst einen Homomorphismus:

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{SU}(1,1) &\longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Als Konjugation ist $\phi$ ein Homomorphismus. $A \in \mathrm{SU}(1,1) \Rightarrow \det(A) = 1 \Rightarrow \det \phi(A) = 1$, denn $\det(\cdot)$ ist invariant unter Konjugation. Es verbleibt zu zeigen, daß die Elemente der Matrix $\phi(A)$ reell sind. Ich verwende dafür die in (12) gewonnene Darstellung:

$$\begin{aligned} \phi(A) = \phi \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} (a+\overline{b})i & (b+\overline{a})i \\ \overline{b} - a & \overline{a} - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} (a+\overline{b})i + (b+\overline{a})i & a + \overline{b} - b - \overline{a} \\ \overline{b} - a + \overline{a} - b & (\overline{a} - b)i - (\overline{b} - a)i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} (a + \overline{a} + b + \overline{b})i & a - \overline{a} - (b - \overline{b}) \\ \overline{b} - a + \overline{a} - b & (a + \overline{a} - b - \overline{b})i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a+\overline{a}}{2} + \frac{b+\overline{b}}{2} & \frac{a-\overline{a}}{2i} - \frac{b-\overline{b}}{2i} \\ -\frac{a-\overline{a}}{2i} - \frac{b-\overline{b}}{2i} & \frac{a+\overline{a}}{2} - \frac{b+\overline{b}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Re}(b) & \mathrm{Im}(a) - \mathrm{Im}(b) \\ -\mathrm{Im}(a) - \mathrm{Im}(b) & \mathrm{Re}(a) - \mathrm{Re}(b) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Die Matrix $\phi(A)$ ist reell mit Determinante 1, also bildet $\phi$ nach $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ab. Um zu zeigen, daß $\phi$ ein Isomorphismus ist, ist noch die Bijektivität beweisen. Betrachte die Gleichung

$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

sie ist nach (13) äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) \\ \mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Re}(b) \\ \mathrm{Im}(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} \tag{14}$$

Berechnung der Determinante der linken Matrix in (14) ergibt $-4$, also hat das Gleichungssystem (14) genau eine Lösung. Für beliebige $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ gibt es also genau ein Paar (a,b) komplexer Zahlen, welche diese Gleichung erfüllen. Daher ist $\phi$ eine Bijektion, und die vorhergehenden Schlüsse zeigen, daß $\phi$ also ein Isomorphismus ist

$$\Rightarrow \mathrm{SU}(1,1) \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \ \blacksquare$$

**b)**

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß die komplexe Möbiustransformation (Cayleyabbildung)

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

ein biholomorpher Isomorphismus ist zwischen der oberen Halbebene $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und der Einheitskreisscheibe $\mathfrak{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

In Aufgabe 6 wurde nachgewiesen, daß $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ auf $\mathfrak{H}$ transitiv operiert durch

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau \right) \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$\mathrm{SU}(1,1)$ operiert auf $\mathfrak{D}$ durch

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \tau \right) \mapsto \frac{a\tau + b}{\overline{b}\tau + \overline{a}} \tag{15}$$

Cayley-Abbildung:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

In a) wurde gezeigt, daß

$$\mathrm{SU}(1,1) = C\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})C^{-1}$$

bzw. für

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{SU}(1,1) = c^{-1}\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})c$$

Die Cayley-Matrix konjugiert $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}(1,1)$ hin und zurück. Da nachgewiesen wurde, daß $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ transitiv auf $\mathfrak{H}$ operiert, operiert $\mathrm{SU}(1,1)$ transitiv auf $\mathfrak{D}$.

Direkter Nachweis (Ich halte mich nach soviel Rechnen/Schreiben etwas kürzer):

$$g := \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} \begin{pmatrix} 1 & z \\ \overline{z} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1) \text{ für } z \in \mathfrak{D}$$

($g$ hat die Struktur wie in (4), ist auf Determinante 1 normiert) und $g$ bildet für $|z| < 1$ 0 auf $z$ ab.

Anmerkung zum Ursprung der Berechnung der Operation in (15):

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ wirkt auf } \tau \in \mathfrak{H} \text{ durch } \frac{a\tau+b}{c\tau+d},$$

$$\mathrm{SU}(1,1) \ni \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \text{ wirkt auf } \tau \in \mathfrak{D} \text{ durch } \frac{\alpha\tau+\beta}{\overline{\beta}\tau+\overline{\alpha}},$$

$$\alpha = \frac{a+d}{2} + i\frac{b-c}{2},$$

$$\beta = \frac{d-a}{2} + i\frac{b+c}{2},$$

dabei

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{D} &\longrightarrow \mathfrak{H} \\ z &\longmapsto i\frac{1-z}{1+z} \end{aligned}$$

als konforme Abbildung der Einheitsscheibe $\mathfrak{D}$ auf die obere Halbebene $\mathfrak{H}$, welche sich mit der Operation verträgt.