

Aufgabe 37

a)

gegeben: W sei ein K -Vektorraum, W^* sein Dualraum

gesucht: kanonische symplektische Form auf $W^* \oplus W$

Lösung:

Bezeichne X den Raum $W^* \oplus W$. Dann definiere ich die symplektische Form

$$\omega : X \times X \rightarrow K$$

wie folgt:

$$\omega((w'_1, w_1), (w'_2, w_2)) := w'_2(w_1) - w'_1(w_2)$$

bzw. in anderer Schreibweise:

$$\omega((w'_1, w_1), (w'_2, w_2)) := \langle w'_2, w_1 \rangle_{W^*, W} - \langle w'_1, w_2 \rangle_{W^*, W}$$

für $w_1, w_2 \in W$, $w'_1, w'_2 \in W^*$.

Ich zeige, daß das so definierte ω eine schiefsymmetrische Linearform ist.

Linearität ersten Argument:

$$\begin{aligned} \omega((w'_1, w_1) + (w', w), (w'_2, w_2)) &= \omega((w'_1 + w', w_1 + w), (w'_2, w_2)) \\ &= w'_2(w_1 + w) - (w'_1 + w')(w_2) \\ &= w'_2 w_1 + w'_2 w - w'_1(w_2) - w'(w_2) \\ &= w'_2 w_1 - w'_1(w_2) + w'_2 w - w'(w_2) \\ &= \omega((w'_1, w_1), (w'_2, w_2)) + \omega((w', w), (w'_2, w_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(\lambda(w'_1, w_1), (w'_2, w_2)) &= \omega((\lambda w'_1, \lambda w_1), (w'_2, w_2)) \\ &= w'_2(\lambda w_1) - (\lambda w'_1)(w_2) \\ &= \lambda w'_2(w_1) - \lambda w'_1(w_2) \\ &= \lambda(w'_2(w_1) - w'_1(w_2)) \\ &= \lambda \omega((w'_1, w_1), (w'_2, w_2)) \end{aligned}$$

Schiefsymmetrie:

$$\begin{aligned}\omega((w'_1, w_1), (w'_2, w_2)) &= w'_2(w_1) - w'_1(w_2) \\ &= -(w'_1(w_2) - w'_2(w_1)) \\ &= -\omega((w'_2, w_2), (w'_1, w_1))\end{aligned}$$

Die Linearität im zweiten Argument ergibt sich natürlich aus der Schiefsymmetrie.

Damit ist durch ω eine symplektische Form auf $W^* \oplus W$ definiert.

b)

Voraussetzungen: $M \in Sp_{2n}(K)$, λ Eigenwert von M mit Vielfachheit k
zu zeigen: $\frac{1}{\lambda}$ ist auch Eigenwert von M mit der Vielfachheit k

Beweis:

$$Sp_{2n}(K) = \{M \in GL_{2n}(K) : M^t J M = J\} \quad \text{mit } J = \begin{pmatrix} & E \\ -E & \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}M \in Sp_{2n}(K) &\Rightarrow M^{-1} \in Sp_{2n}(K) \\ M^t J M = J &\Rightarrow M^{-1} J^{-1} M^{t-1} = J^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow M^{-1} J^{-1} &= J^{-1} M^t \\ \Rightarrow M^{-1} &= J^{-1} M^t J\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(\lambda E - M^{-1}) &= \det(\lambda E - J^{-1} M^t J) \\ &= \det(\lambda E - M^t) \\ &= \det(\lambda E - M)\end{aligned}$$

Ist λ ein Eigenwert von M mit der Vielfachheit k , dann ist (aus Linearer Algebra bekannt) $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von M^{-1} mit der Vielfachheit k . Aus obenstehender Gleichung folgt, daß also $\frac{1}{\lambda}$ auch ein Eigenwert von M mit der Vielfachheit k ist. ■

Aufgabe 38

Voraussetzungen: (V, ω) normierter symplektischer Vektorraum,
 $\phi : V \rightarrow V$ symplektische Abbildung.

Definition: ϕ heißt *stabil*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \vartheta > 0 : \|\phi^N v\| < \varepsilon \quad \forall N \in \mathbb{N} \text{ und } \|v\| < \vartheta.$$

a) zu zeigen: Hat $\phi \in \text{Sp}V$ einen Eigenwert λ mit $|\lambda| \neq 1$, ist ϕ nicht stabil.

Beweis:

Nach Aufgabe 37 b) besitzt ϕ auch den Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$. Wegen $|\lambda| \neq 1$ ist $|\lambda| > 1$ oder $|\frac{1}{\lambda}| > 1$.

ϕ besitzt also einen Eigenwert μ mit $|\mu| > 1$.

$$\Rightarrow \exists w \in V, w \neq 0 : \phi(w) = \mu w.$$

$$\Rightarrow \|\phi(w)\| = \|\mu w\| = |\mu| \|w\| > \|w\| \quad (1)$$

Angenommen, ϕ wäre stabil, und es gäbe also ein ϑ , was die Bedingung erfüllt:

$$\|\phi^N v\| < \varepsilon \quad \forall N \in \mathbb{N}, \|v\| < \vartheta, \varepsilon > 0.$$

Setze $v := \alpha \vartheta \frac{w}{\|w\|}$ mit $0 < \alpha < 1$, dann ist

$$\|v\| = \left\| \alpha \vartheta \frac{w}{\|w\|} \right\| = \alpha \vartheta \left\| \frac{w}{\|w\|} \right\| = \alpha \vartheta < \vartheta, \quad (2)$$

für dieses v gilt nach der Annahme:

$$\|\phi^N v\| < \varepsilon \quad \forall N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0.$$

Nun ist

$$\|\phi(v)\| = \left\| \phi \left(\alpha \vartheta \frac{w}{\|w\|} \right) \right\| = \alpha \vartheta \frac{\|\phi(w)\|}{\|w\|} > \alpha \vartheta \quad \text{nach (1)}. \quad (3)$$

$\forall \alpha : 0 < \alpha < 1$ gilt für diese v also nach (2) und (3)

$$\|\phi(v)\| > \|v\| \text{ und } \|\phi(v)\| < \vartheta.$$

Für $\varepsilon < \vartheta$ erhalte ich einen Widerspruch zur Annahme, wenn ich α so wähle, daß $\|v\| = \varepsilon$.

Aufgabe 39

Nach Definition:

$$U(n) = \{U \in GL(n, \mathbb{C}), \bar{U}^t U = E_n\}$$

Zerlegung in Realteil und Imaginärteil:

$$U \in U(n), U = (x_{ij} + iy_{ij}), x, y \in \mathbb{R}$$

$$U = X + iY, X, Y \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\bar{U} = X - iY$$

$$\bar{U}^t = (X - iY)^t = X^t - (iY)^t = X^t - iY^t$$

$$\bar{U}^t U = (X^t - iY^t)(X + iY) = X^t(X + iY) - iY^t(X + iY)$$

$$= X^t X + iX^t Y - iY^t X + Y^t Y = X^t X + Y^t Y + i(X^t Y - Y^t X) = E_n$$

Bedingungen an X und Y :

$$X^t Y - Y^t X = 0, \tag{4}$$

$$X^t X + Y^t Y = E_n \tag{5}$$

$$SO(2n) = \{A \in GL(2n) \mid A^t A = E_{2n} \wedge \det A = 1\}$$

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2n) : A^t J_{2n} A = J_{2n}\} \quad \text{mit } J_{2n} = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}$$

Ich ordne einer Matrix $U(n) \ni X + iY$ die Matrix $A \in GL(2n)$ zu mittels:

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Dann ist:

$$A^t A = \begin{pmatrix} X^t & -Y^t \\ Y^t & X^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^t X + Y^t Y & X^t Y - Y^t X \\ Y^t X - X^t Y & Y^t Y + X^t X \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\det A = X^2 + Y^2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A^t J_{2n} A &= \begin{pmatrix} X^t & -Y^t \\ Y^t & X^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y^t & X^t \\ -X^t & Y^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^t X - X^t Y & Y^t Y + X^t X \\ -X^t X - Y^t Y & -X^t Y + Y^t X \end{pmatrix} \\ A^t J_{2n} A &= \begin{pmatrix} Y^t X - X^t Y & Y^t Y + X^t X \\ -(X^t X + Y^t Y) & Y^t X - X^t Y \end{pmatrix} \quad (9) \end{aligned}$$

Sei nun $U \in U(n)$, dann wird wegen (5) und (6) in (7)

$$A^t A = \begin{pmatrix} E_n & \\ & E_n \end{pmatrix} = E_{2n},$$

$\det A = 1$, also $A \in \text{SO}(2n)$.

Wegen (5) und (6) wird in (9)

$$A^t J_{2n} A = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} = J_{2n},$$

also $A \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, und wir haben $A \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \text{SO}(2n)$.

Sei umgekehrt $A \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \text{SO}(2n)$, dann hat A auch eine solche Darstellung, siehe *Hein* S. 52, 84, mit $A^t A = E_{2n}$, $\det A = 1$, $A^t J_{2n} A = J_{2n}$, dann folgt damit aus (7) und (9) $U^t U = E_n$ (siehe Berechnung für (4) und (5)) und damit $U = X + iY \in U(n)$.

Der gefragte Isomorphismus ist die Abbildung

$$U(n) \ni U = X + iY \rightarrow \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \text{SO}(2n).$$

Die Wohldefiniertheit wurde gezeigt, die Injektivität ist offensichtlich, und die Surjektivität folgt aus obigen Darstellungen.

Aufgabe 40

Definition: Für $X \in M_n(K)$ wird

$$\text{ad } X : M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$$

definiert durch

$$(\text{ad } X)(Y) = [X, Y] = XY - YX.$$

zu zeigen:

$$\text{a) } (\text{ad } X)^k(Y) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l} Y X^l \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{b) } (\exp(\text{ad } X))(Y) = (\exp X)Y(\exp X)^{-1}$$

Beweis:

a) Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Sei $k = 1$. Die Behauptung erhält für $k = 1$ die Gestalt:

$$(\text{ad } X)^1(Y) = \sum_{l=0}^1 (-1)^l \binom{1}{l} X^{1-l} Y X^l$$

gleichbedeutend mit

$$\text{ad } X(Y) = (-1)^0 \binom{1}{0} X^1 Y X^0 + (-1)^1 \binom{1}{1} X^0 Y X^1$$

äquivalent zu

$$\text{ad } X(Y) = XY - YX,$$

der Definition von ad . Die Behauptung gilt also für $k = 1$.

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für ein $k \in \mathbb{N}$. Es wird nachgewiesen, daß sie dann auch für $k + 1$ richtig ist.

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ad} X)^{k+1}(Y) &= (\operatorname{ad} X)(\operatorname{ad} X)^k(Y) \\
&= (\operatorname{ad} X) \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l} Y X^l \quad (\text{nach Induktionsannahme}) \\
&= [X, \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l} Y X^l] \quad (\text{nach Definition ad}) \\
&= X \left(\sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l} Y X^l \right) - \left(\sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l} Y X^l \right) X \\
&= \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l+1} Y X^l - \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l} Y X^{l+1} \\
&= \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l+1} Y X^l - \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} \binom{k}{l-1} X^{k-l+1} Y X^l \\
&= \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l+1} Y X^l + \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^l \binom{k}{l-1} X^{k-l+1} Y X^l \\
&= \binom{k}{0} X^{k+1} Y + \sum_{l=1}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l+1} Y X^l + \sum_{l=1}^k (-1)^l \binom{k}{l-1} X^{k-l+1} Y X^l \\
&\quad + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} Y X^{k+1} \\
&= X^{k+1} Y + \sum_{l=1}^k (-1)^l \left(\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right) X^{k-l+1} Y X^l + (-1)^{k+1} Y X^{k+1} \\
&= X^{k+1} Y + \sum_{l=1}^k (-1)^l \binom{k+1}{l} X^{k-l+1} Y X^l + (-1)^{k+1} Y X^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0} X^{k-0+1} Y X^0 + \sum_{l=1}^k (-1)^l \binom{k+1}{l} X^{k-l+1} Y X^l \\
&\quad + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} X^{k-(k+1)+1} Y X^{k+1} \\
&= \sum_{l=0}^{k+1} (-1)^l \binom{k+1}{l} X^{k-l+1} Y X^l \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(\exp(\operatorname{ad} X))(Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\operatorname{ad} X)^k(Y) && \text{(nach Definition der Abbildung exp)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l} Y X^l && \text{(nach der Eigenschaft a)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{k!}{l!(k-l)!} X^{k-l} Y X^l \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{1}{l!(k-l)!} X^{k-l} Y X^l \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!(k-l)!} X^{k-l} Y (-X)^l \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{X^{k-l}}{(k-l)!} Y \frac{(-X)^l}{l!} && \text{(dies ist ein Cauchy-Produkt)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} Y \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-X)^l}{l!} && \text{(absolut konvergente Reihen)} \\
&= (\exp X) Y (\exp(-X)) \\
&= (\exp X) Y (\exp X)^{-1} \blacksquare
\end{aligned}$$