Stefan Kottwitz
WiSe 2005/06

Handout Seminar Darstellungstheorie

Das komplette Script (19 Seiten, mit Beweisen) kann auf
`http://gruppentheorie.de/darstellungen3.pdf` eingesehen werden.

Direkte Folgerung aus Schurs Lemma: Für irreduzible $\mathbb{C}G$-Moduln V, W ist

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,W)) = \begin{cases} 1 & \text{für } V \cong W, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Allgemein für $\mathbb{C}G$-Moduln V, V_i, W, W_i:

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}\left(\bigoplus_{i=1}^{m} V_i, \bigoplus_{j=1}^{n} W_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \dim\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j)\bigr).$$

Satz: Für eine direkte Summe $\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ und U_i, U irreduzibel ist die Anzahl der zu U isomorphen U_i gleich $\dim U$.

Definition: Eine Menge $V_1, \ldots, V_n$ von irreduziblen $\mathbb{C}G$-Moduln heißt eine *vollständige Menge paarweise nichtisomorpher $\mathbb{C}G$-Moduln*, wenn jeder irreduzible $\mathbb{C}G$-Modul zu einem der V_i isomorph ist, jedoch keine zwei der $V_1, \ldots, V_n$ isomorph sind.

Theorem: Für eine vollständige Menge nichtisomorpher $\mathbb{C}G$-Moduln $V_1, \ldots, V_n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (\dim V_i)^2 = |G|.$$

Konjugationsklassen der D_n:

$$D_n = \langle d, s \mid d^n = s^2 = 1,\, dsd = s\rangle = \{1, d, d^2, \ldots, d^{n-1}, s, ds, \ldots, d^{n-1}s\}$$

1. Fall: n ungerade

D_n hat genau $\frac{n+3}{2}$ Konjugationsklassen:

$$\{1\}, \{d, d^{-1}\}, \ldots, \{d^{\frac{n-1}{2}}, d^{-\frac{n-1}{2}}\}, \{s, ds, \ldots, d^{n-1}s\}.$$

2. Fall: n gerade

D_n hat genau $\frac{n}{2} + 3$ Konjugationsklassen:

$$\{1\}, \left\{d^{\frac{n}{2}}\right\}, \left\{d, d^{-1}\right\}, \ldots, \left\{d^{\frac{n}{2}-1}, d^{-\frac{n}{2}+1}\right\},$$
$$\left\{d^{2j}s \mid 0 \le j \le \frac{n}{2} - 1\right\}, \left\{d^{2j+1}s \mid 0 \le j \le \frac{n}{2} - 1\right\}.$$

Konjugationsklassen der S_n:

Die Konjugationsklasse π^{S_n} einer Permutation $\pi \in S_n$ besteht aus allen Permutationen aus S_n mit der gleichen Zykelstruktur.
Die Anzahl der Konjugationsklassen von S_n ist gegeben durch die Anzahl der Partitionen von n.
Anzahl der Permutationen einer Konjugationsklasse:

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} i^{k_i} k_i!}.$$

Konjugationsklassen der A_n:

Sei $x \in A_n,\ n > 1$. Kommutiert x mit einer ungeraden Permutation in S_n, dann ist $x^{A_n} = x^{S_n}$.
Andernfalls zerfällt x^{S_n} in zwei Konjugationsklassen von A_n gleicher Größe mit Repräsentanten x und $(12)^{-1}x(12)$.

Bemerkung: an der Zerlegung von x in disjunkte Zykel kann man diese Fälle wie folgt unterscheiden: haben alle Zykel der Zerlegung ungerade und paarweise verschieden Länge, dann ist $x^{A_n} \neq x^{S_n}$, andernfalls $x^{A_n} = x^{S_n}$.

Das Zentrum einer Gruppenalgebra

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G \mid zr = rz\ \forall\, r \in \mathbb{C}G\}$$

Definition: Für die verschiedenen Konjugationsklassen $C_1, \ldots, C_n$ der Gruppe G heißen

$$\overline{C}_i := \sum_{g \in C_i} g \ \in \mathbb{C}G$$

die *Klassensummen* von $\mathbb{C}G$.

Theorem: Die Klassensummen $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_n$ bilden eine Basis von $Z(\mathbb{C}G)$.