Der Vektorraum der $\mathbb{C}G$-Homomorphismen

Seien V, W $\mathbb{C}G$-Moduln. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ bezeichne den $\mathbb{C}$-Vektorraum der $\mathbb{C}G$-Homomorphismen von V nach W. Addition und skalare Multiplikation für $\vartheta, \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} \vartheta + \varphi : \quad & v \mapsto \quad \vartheta(v) + \varphi(v), \\ \lambda\vartheta : \quad & v \mapsto \quad \lambda\vartheta(v). \end{aligned}$$

Unser erstes Ziel ist die Bestimmung der Dimension von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ für beliebige $\mathbb{C}G$-Moduln V, W.

Satz 1: Für irreduzible $\mathbb{C}G$-Moduln V, W ist

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \begin{cases} 1 & \text{für } V \cong W, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Beweis:

Nach dem ersten Teil von Schurs Lemma enthält $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ nur Isomorphismen und den trivialen Homomorphismus. Ist $V \ncong W$, so besteht $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ folglich nur aus dem trivialen Homomorphismus und hat die Dimension 0.

Der zweite Teil von Schurs Lemma sagt aus, daß $\mathbb{C}G$-Automorphismen auf V Homothetien[1] sind.

Sei nun $V \cong W$, dann existiert ein $\mathbb{C}G$-Isomorphismus $\vartheta : V \to W$. Für beliebiges $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ ist $\vartheta^{-1} \circ \varphi$ ein $\mathbb{C}G$-Automorphismus und damit eine Homothetie, es existiert also ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$\vartheta^{-1} \circ \varphi = \lambda \mathrm{id}_V,$$

also

$$\varphi = \vartheta \circ \lambda \mathrm{id}_V = \lambda\vartheta,$$

und es folgt

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \{\lambda\vartheta \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

mit Dimension 1. ■

[1] skalare Vielfache des Identitäts-Automorphismus id_V

Satz 2: Sind V, W $\mathbb{C}G$-Moduln mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) \neq \{0\}$, dann haben sie einen gemeinsamen Kompositionsfaktor[2].

Beweis:

Nach Voraussetzung gibt es ein $0 \neq \vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$. Wir haben $\ker \vartheta \subsetneq V$, dies ist ein echter $\mathbb{C}G$-Untermodul von V. Nach dem Satz vom Maschke existiert ein nichttrivialer (!) $\mathbb{C}G$-Modul U mit

$$V = \ker \vartheta \oplus U.$$

Da U nichttrivial ist, besitzt es einen irreduziblen Untermodul $X \neq \{0\}$. Wegen $X \cap \ker \vartheta = \{0\}$ ist $\vartheta(X) \neq \{0\}$, nach dem ersten Teil von Schurs Lemma muß $\vartheta_{|X} : X \to \vartheta(X)$ ein Isomorphismus sein. Das Bild eines $\mathbb{C}G$-Homomorphismus ist ein $\mathbb{C}G$-Untermodul, also ist X isomorph zu einem Untermodul von W und damit ein gemeinsamer Kompositionsfaktor. ■

Die Berechnung der Dimension wird nun auf die Summierung der Dimensionen der Summanden einer direkten Summe zurückgeführt durch folgenden

Satz 3: Für $\mathbb{C}G$-Moduln V, V_1, V_2, W, W_1, W_2 gilt

(1) $\dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)\big) = \dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1)\big) + \dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)\big)$

(2) $\dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)\big) = \dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1, W)\big) + \dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_2, W)\big)$

Beweis:

(1) Für $i = 1, 2$ definieren wir die Projektionen

$$\begin{aligned} \pi_i : \ W_1 \oplus W_2 &\to W_i, \\ w_1 + w_2 &\mapsto w_i. \end{aligned}$$

$\pi_{1,2}$ sind $\mathbb{C}G$-Homomorphismen. Die Verknüpfung von $\mathbb{C}G$-Homomorphismen ist auch ein $\mathbb{C}G$-Homomorphismus, daher

$$\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2) \ \Rightarrow \ \pi_i \circ \vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_i).$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} f : \ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2) \\ \vartheta &\mapsto (\pi_1 \circ \vartheta, \pi_2 \circ \vartheta). \end{aligned}$$

[2] irreduzibler $\mathbb{C}G$-Modul, welcher zu einem $\mathbb{C}G$-Untermodul von V isomorph ist

Wir zeigen, daß f ein Vektorraumisomorphismus ist. Offensichtlich ist f linear. f ist surjektiv, denn für vorgegebenes $(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_i)$ gibt es ein Urbild

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2): \; v \mapsto \varphi_1(v) + \varphi_2(v).$$

f ist injektiv, denn

$$\vartheta \in \ker f \;\Rightarrow\; f(\vartheta) = (0,0) = (\pi_1 \circ \vartheta, \pi_1 \circ \vartheta)$$

und für alle $v \in V$ folgt

$$\vartheta(v) = \big((\pi_1 + \pi_2) \circ \vartheta\big)(v) = (\pi_1 \circ \vartheta)(v) + (\pi_2 \circ \vartheta)(v) = 0$$

und somit $\vartheta = 0, \; \ker f = \{0\}$.

Aus der Isomorphie mittels f folgt die Gleichheit der Dimensionen und die Behauptung (1).

(2) läßt sich analog begründen, statt der Projektionen verwendet man die Restriktionen $\vartheta_{|V_1}, \vartheta_{|V_2}$ und den Vektorraumisomorphismus

$$\begin{aligned} f: \; \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_2, W) \\ \vartheta &\mapsto (\vartheta_{|V_1}, \vartheta_{|V_2}). \end{aligned}$$

Gegebenes $(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W)$ hat das Urbild

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W) \ni \varphi : V_1 \oplus V_2 \ni v_1 + v_2 \mapsto \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2),$$

auch Injektivität ist offensichtlich, und (2) folgt. ■

Satz 3 läßt sich mittels Induktion auf beliebige endliche Summen erweitern, und wir erhalten das Resultat:

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}\left(\bigoplus_{i=1}^{m} V_i, \bigoplus_{j=1}^{n} W_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j)\big). \qquad (2)$$

Im allgemeinen Fall kann man also $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W))$ berechnen, indem man V, W in direkte Summen irreduzibler Unterräume V_i, W_j zerlegt und mittels (1) und (2) summiert.

Ein Spezialfall von (2) liefert folgendes

Korollar 4: Gegeben seien $\mathbb{C}G$-Moduln V, W mit

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$$

und U_i, W irreduzibel. n sei die Anzahl der U_i mit $U_i \cong W$. Dann ist

$$\dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,W)\big) = \dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W,V)\big) = n.$$

Beweis:

Einfache Summe mittels (2) und Berücksichtigung von (1). ■

Satz 5: Für einen endlichdimensionalen $\mathbb{C}G$-Modul V ist

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, V)) = \dim(V).$$

Beweis:

Wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_d$ ($d = \dim V$) von V und setzen

$$\begin{aligned} \varphi_i :\ \mathbb{C}G &\to V \\ r &\mapsto r v_i \end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, d$ und $r \in \mathbb{C}G$. Da V ein $\mathbb{C}G$-Modul ist, impliziert dies $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, V)$. Wir wollen zeigen, daß die φ_i eine Basis in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, V)$ bilden.

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, V)$ beliebig. Dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(1) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_d v_d$$

Aus der Homomorphie-Eigenschaft von φ folgt für $r \in \mathbb{C}G$

$$\varphi(r) = \varphi(r1) = r\varphi(1) = r(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_d v_d) = \lambda_1\varphi_1(r) + \ldots + \lambda_d\varphi_d(r),$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ spannen also $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, V)$ auf.

Prüfung auf lineare Unabhängigkeit: Sei

$$\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_d\varphi_d = 0$$

für $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$. Setzt man das neutrale Element in den linksstehenden Homomorphismus ein, so ist

$$0 = (\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_d\varphi_d)(1) = \lambda_1\varphi_1(1) + \ldots + \lambda_d\varphi_d(1)$$

$$= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_d v_d$$

und da $v_1, \ldots, v_d$ linear unabhängig sind, gilt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_d = 0$, also sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ linear unabhängig und zusammen mit oben festgestelltem also eine Basis in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, V)$und $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, V)) = d$. ■

Daraus folgern wir nun

Satz 6: Für eine direkte Summe

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$$

und U_i, U irreduzibel ist die Anzahl der zu U isomorphen U_i gleich $\dim U$.

Beweis:

Ergibt sich nach Anwendung von Satz 5 und 4. ■

Definition: Eine Menge $V_1, \ldots, V_n$ von irreduziblen $\mathbb{C}G$-Moduln heißt eine *vollständige Menge paarweise nichtisomorpher $\mathbb{C}G$-Moduln*, wenn jeder irreduzible $\mathbb{C}G$-Modul zu einem der V_i isomorph ist, jedoch keine zwei der $V_1, \ldots, V_n$ isomorph sind[3].

Theorem 7: Für eine vollständige Menge nichtisomorpher $\mathbb{C}G$-Moduln $V_1, \ldots, V_n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (\dim V_i)^2 = |G|.$$

Beweis:

Sei

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$$

eine Zerlegung von $\mathbb{C}G$ in irreduzible $\mathbb{C}G$-Untermoduln. Wir haben

$$\dim \mathbb{C}G = \dim U_1 + \ldots + \dim U_m,$$

wenden Satz 6 für jedes V_i und erhalten wegen $\dim \mathbb{C}G = |G|$ die Behauptung. ■

[3]Die Existenz einer vollständigen Menge nichtisomorpher $\mathbb{C}G$-Moduln ist für endliche Gruppen laut vorigem Vortrag gesichert.

Konjugationsklassen

Im folgenden werden Konjugationsklassen von Gruppen definiert und untersucht, sowie für einige Beispiele bestimmt. Der Grund dafür ist, daß die Kenntnis der Konjugationsklassen einer Gruppe uns auf die Anzahl ihrer irreduziblen Darstellungen schließen läßt.
Im weiteren sei G stets eine endliche Gruppe.

Definition: Seien $x, y \in G$. x heißt *konjugiert* zu y in G, wenn ein $g \in G$ existiert mit

$$y = g^{-1}xg.$$

Die Menge aller zu x konjugierten Elemente von G

$$x^G = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$$

wird als *Konjugationsklasse* von x in G bezeichnet.

Satz 8: Zwei verschiedene Konjugationsklassen derselben Gruppe haben kein Element gemeinsam.

Beweis:

Seien x^G, y^G die Konjugationsklassen von $x, y \in G$. Wir beweisen, daß ein nichtleerer Durchschnitt die Gleichheit der Konjugationsklassen impliziert. Angenommen also, $x^G \cap y^G \neq \emptyset$, dann gibt es $g, h \in G$ mit

$$g^{-1}xg = h^{-1}yh.$$

Umformung liefert

$$x = gh^{-1}yhg^{-1} = (hg^{-1})^{-1}y(hg^{-1}) = k^{-1}yk$$

mit $k := hg^{-1}$. Für beliebiges $a \in x^G$ gibt es nach Definition ein $b \in G$ mit $a = b^{-1}xb$ und somit

$$a = b^{-1}k^{-1}ykb = (kb)^{-1}y(kb)$$

und es folgt $a \in y^G$. Gezeigt ist nun $x^G \subseteq y^G$, wegen Symmetrie folgt $y^G \subseteq x^G$, also sind die Konjugationsklassen gleich. ∎

Bemerkung: alternativ läßt sich zeigen, daß die Konjugiertheit eine Äquivalenzrelation auf G ist, die Konjugationsklassen sind die Äquivalenzklassen.

Korollar 9: Jede Gruppe ist disjunkte Vereinigung von Konjugationsklassen.

Definition: Für eine disjunkte Vereinigung

$$G = x_1^G \cup \ldots \cup x_n^G$$

nennt man $x_1, \ldots, x_n$ *Repräsentanten* der Konjugationsklassen von G.

Satz 10: Ist x konjugiert zu y in G, so ist auch x^n konjugiert zu y^n in G für $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

Für $n = 1$ ist der Satz nach Voraussetzung erfüllt, und für $n > 1$ ist wegen Assoziativität und $gg^{-1} = 1$

$$(g^{-1}xg)^n = g^{-1}x^n g.$$

Aus $y = g^{-1}xg$ folgt daher $y^n = g^{-1}x^n g$, also ist x^n konjugiert zu y^n in G. Für negatives n ergibt sich die Gültigkeit aus der obigen Betrachtung für das Inverse x^{-1}, denn es ist auch

$$y = g^{-1}xg \;\Rightarrow\; y^{-1} = (g^{-1}xg)^{-1} = gx^{-1}g^{-1},$$

also x^{-1} konjugiert zu y^{-1}. ∎

Die Größe der Konjugationsklassen bestimmen wir mittels Bezug auf eine Untergruppe, die gegeben ist durch folgende

Definition: Der Zentralisator eines Elements x in G ist die Menge aller mit x vertauschenden Elemente, Bezeichnung:

$$C_G(x) = \{g \in G \mid xg = gx\} = \{g \in G \mid x = g^{-1}xg\}.$$

$C_G(x) \neq \emptyset$ wegen $x \in C_G(x)$, für $g, h \in C_G(x)$ ist $(gh)g = g(hg) = g(gh)$ und damit das Untergruppenkriterium für endliche Gruppen erfüllt.

Satz 11: Für $x \in G$ ist

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = \frac{|G|}{|C_G(x)|}.$$

Beweis:

Zur Erinnerung: $|G : C_G(x)|$ ist die Anzahl der verschiedenen Rechtsnebenklassen von $C_G(x)$ in G.

Wir definieren eine Abbildung:

$$\varphi : \begin{array}{rl} x^G & \to \{C_G(x)g \mid g \in G\} \\ g^{-1}xg & \mapsto C_G(x)g \end{array}$$

φ ist injektiv, denn für $x^G \ni a = g^{-1}xg$ und $x^G \ni b = h^{-1}xh$ ist

$$\begin{array}{rcrl} \varphi(a) = \varphi(b) & \Leftrightarrow & \varphi(g^{-1}xg) & = \varphi(h^{-1}xh) \\ & \Leftrightarrow & C_G(x)g & = C_G(x)h \\ & \Leftrightarrow & C_G(x) & = C_G(x)hg^{-1} \\ & \Leftrightarrow & hg^{-1} & \in C_G(x) \\ & \Leftrightarrow & hg^{-1}x & = xhg^{-1} \\ & \Leftrightarrow & g^{-1}xg & = h^{-1}xh \\ & \Leftrightarrow & a & = b. \end{array}$$

φ ist surjektiv, da jedes $C_G(x)g$ nach Definition von x^G ein Urbild hat. Wegen der Bijektivität von φ ist die behauptete Gleichheit gezeigt. Die nebenstehende Gleichheit folgt mit dem Satz von Lagrange. ■

Satz 12: Die Klassengleichung: Für Repräsentanten der Konjugationsklassen von G $x_1, \ldots, x_n$ gilt:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|$$

Beweis:

Wegen Korollar 9 ist zunächst

$$|G| = \sum_{i=1}^{n} |x_i^G|,$$

weiterhin ist nach Definition des Zentrums von G

$$\begin{aligned} x \in Z(G) &\Leftrightarrow g^{-1}xg = x \; \forall \, g \in G \\ &\Leftrightarrow |x^G| = 1 \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. ■

Mit Satz 11 gilt natürlich auch

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |G : C_G(x)|$$

und $|Z(G)|$ und $|x_i^G|$ teilen die Gruppenordnung $|G|$.

Die Konjugationsklassen von D_n, S_n, A_n

Beispiel 1: D_n

D_n ist die Gruppe[4] der Drehungen und Spiegelungen der Ebene, welche ein reguläres n-Eck invariant lassen. Sie hat $2n$ Elemente, nämlich n Drehungen (diese bilden eine zyklische Untergruppe) und n Spiegelungen.
Bezeichnet man mit d die Drehung um $2\pi/n$ und mit s eine der Spiegelungen, kann man die Gruppe schreiben als

$$D_n = \langle d, s \mid d^n = s^2 = 1,\, dsd = s\rangle$$

bzw. als Menge

$$D_n = \{1, d, d^2, \ldots, d^{n-1}, s, ds, \ldots, d^{n-1}s\}.$$

1. Fall: n ungerade

Drehungen kommutieren, also ist $\langle d\rangle \subseteq C_G(d^i)$ und folglich

$$|G : C_G(d^i)| \leq |G : \langle d\rangle| = 2.$$

Hierbei und weiterhin sei $1 \leq i \leq n-1$. $dsd = s$ impliziert $d^i s d^i = s$, umgestellt

$$s^{-1} d^i s = d^{-i}, \tag{3}$$

d^i und d^{-i} sind konjugiert. Aus $d^i = d^{-i}$ folgte $d^{2i} = 1$, was n ungerade widerspräche. Also ist $d^i \neq d^{-i}$ und daher $|(d^i)^G| \geq 2$. Zusammen mit Satz 11 ist

$$2 \geq |G : C_G(d^i)| = |(d^i)^G| \geq 2$$

und damit

$$(d^i)^G = \{d^i, d^{-i}\}, \quad C_G(d^i) = \langle d\rangle.$$

Aus (3) folgt auch $d^i s = s d^{-i}$, wegen $d^i \neq d^{-i}$ kommutiert kein d^i mit s. Wieder aus (3) folgt mit $s^2 = 1$

$$s d^i s = s^2 d^{-i} = d^{-i} \neq d^i = d^i s s,$$

daß auch kein $d^i s$ mit s kommutiert. Es verbleibt $C_G(s) = \{1, s\}$. Nach Satz 11 ist dann $|s^G| = |G|/2 = n$. Die Elemente d^i kommen nach obiger Betrachtung nicht in Frage, s^G enthält somit die verbleibenden Elemente von G, es ist

$$(s^i)^G = \{s, ds, \ldots, d^{n-1}s\}.$$

[4] manchmal auch als D_{2n} bezeichnet

Ergebnis: D_n hat für ungerades n genau $\frac{n+3}{2}$ Konjugationsklassen:

$$\{1\}, \{d, d^{-1}\}, \ldots, \{d^{\frac{n-1}{2}}, d^{-\frac{n-1}{2}}\}, \{s, ds, \ldots, d^{n-1}s\}.$$

2. Fall: n gerade

Wir setzen $m := \frac{n}{2}$. Wie im ersten Fall folgt für $1 \leq i \leq m-1$ $(d^i)^G = \{d^i, d^{-i}\}$. Es gilt auch hier die Folgerung (3), wegen $d^m = d^{-m}$ ergibt sich

$$d^m s = sd^m,$$

folglich $d, s \in C_G(d^m)$ und $C_G(d^m) = G$. Schließlich ist $(d^m)^G = \{d^m\}$.

Aus $dsd = s$ folgt

$$d^j s d^j = s \;\Rightarrow\; d^j s = sd^{-j} \;\Rightarrow\; d^{2j} s = d^j s d^{-j} \tag{4}$$

und damit

$$d^{2j} s \in s^G \text{ für } 0 \leq j \leq m-1. \tag{5}$$

In (4) formen wir noch um zu

$$d^{2j+1} s = d^j (ds) d^{-j}$$

und erhalten

$$d^{2j+1} s \in (ds)^G \text{ für } 0 \leq j \leq m-1. \tag{6}$$

Ähnlich wie im 1. Fall bestimmen wir $|s^G|$: zunächst ist $\{1, s\} \subseteq C_G(s)$. Aus (3) folgt $d^i s = sd^{-i}$. Wegen $d^{2m} = 1$ ist $d^m = d^{-m}$, d.h. $d^m \in C_G(s)$, somit $\{1, s, d^m, sd^m\} \subseteq C_G(s)$, $|C_G(s)| \geq 4$, und nach Satz 11 $|s^G| \leq m$.

Also bestimmt (5) bereits alle Elemente von s^G, und es verbleibt der Rest von (6) für $(ds)^G$.

Ergebnis: D_n hat für gerades n genau $\frac{n}{2} + 3$ Konjugationsklassen:

$$\{1\}, \left\{d^{\frac{n}{2}}\right\}, \left\{d, d^{-1}\right\}, \ldots, \left\{d^{\frac{n}{2}-1}, d^{-\frac{n}{2}+1}\right\},$$

$$\left\{d^{2j} s \mid 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1\right\}, \left\{d^{2j+1} s \mid 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1\right\}.$$

Beispiel 2: S_n

S_n ist die *Symmetrische Gruppe*, die Gruppe der Permutationen einer n-elementigen Menge, welche durch $\{1, \ldots, n\}$ repräsentiert wird.

Hilfssatz: Für einen k-Zykel $z = (i_1 \ldots i_k) \in S_n$ und eine Permutation $\pi \in S_n$ gilt

$$\pi z \pi^{-1} = \pi(i_1, \ldots, i_k)\pi^{-1} = \big(\pi(i_1) \ldots \pi(i_k)\big).$$

Beweis:

Wir betrachten ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wenn $\pi^{-1}(i) \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, dann ist $z(i) = \mathrm{id}(i)$ und $(\pi z \pi^{-1})(i) = (\pi\pi^{-1})(i) = i$.

Ist aber

$$\pi^{-1}(i) =: i_r \in \{i_1, \ldots, i_k\}, \tag{7}$$

so ist

$$(\pi z \pi^{-1})(i) = (\pi z)(i_r) = \pi(i_{r+1}) \quad \text{(bzw. } \pi(i_1), \text{falls r=k)}.$$

(7) ist gleichbedeutend mit $\pi(i_r) = i$, wir haben

$$(\pi z \pi^{-1})(\pi(i_r)) = \pi(i_{r+1}) \quad \text{(bzw. } \pi(i_1), \text{falls r=k)}. \blacksquare$$

Eine beliebige Permutation $x \in S_n$ läßt sich bekanntlich eindeutig[5] als Produkt elementfremder Zykeln darstellen:

$$x = (a_1 \ldots a_{k_1})(b_1 \ldots b_{k_2}) \cdots (c_1 \ldots c_{k_r}).$$

Mit dem Hilfssatz ergibt sich

$$\begin{aligned}\pi x \pi^{-1} &= \pi(a_1 \ldots a_{k_1})\pi^{-1}\pi(b_1 \ldots b_{k_2})\pi^{-1} \cdots \pi(c_1 \ldots c_{k_r})\pi^{-1} \\ &= (\pi(a_1) \ldots \pi(a_{k_1}))(\pi(b_1) \ldots \pi(b_{k_2})) \cdots (\pi(c_1) \ldots \pi(c_{k_r})),\end{aligned}$$

die *Zykelstruktur* $(k_1, \ldots, k_r)$ bleibt also erhalten.

Zykelstrukturen werden als gleich betrachtet, wenn sich die k_i nur in der Anordnung unterscheiden. Daher benutzt man per Konvention entweder stets eine aufsteigende oder stets eine absteigende Reihenfolge in der Zykelstrukturdarstellung.

[5] bis auf die Reihenfolge der Faktoren

Sind umgekehrt zwei Permutationen mit der gleichen Zykelstruktur gegeben, etwa

$$\begin{aligned} x &= (a_1 \dots a_{k_1})(b_1 \dots b_{k_2}) \cdots (c_1 \dots c_{k_r}) \\ y &= (a'_1 \dots a'_{k_1})(b'_1 \dots b'_{k_2}) \cdots (c'_1 \dots c'_{k_r}), \end{aligned}$$

so gibt es eine Permutation $\pi \in S_n$ mit der Wirkung $a_1 \mapsto a'_1, \dots, c_{k_r} \mapsto c'_{k_r}$ und damit nach obigem Hilfssatz

$$\pi x \pi^{-1} = y,$$

x und y sind konjugiert. Damit erhalten wir den

Satz 13: Die Konjugationsklasse π^{S_n} einer Permutation $\pi \in S_n$ besteht aus allen Permutationen aus S_n mit der gleichen Zykelstruktur.

Die Anzahl der Konjugationsklassen von S_n ist damit gegeben durch die Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe aufsteigender natürlicher Zahlen zu schreiben. Diese Summenzerlegung wird als *Partition* bezeichnet, die Anzahl der Partitionen als *Partitionsfunktion* $p(n)$. Die ersten Werte von $p(n)$ für $n = 1, 2, \dots$ sind $1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, \dots$ Somit ist die Anzahl der Konjugationsklassen von S_n für kleine n:

Gruppe	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
Anzahl Konjugationsklassen	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Nun soll die Größe der einzelnen Konjugationsklassen bestimmt werden. Für die Berechnung beziehen wir die 1-Zykel ein. Die Zykelstruktur bestehe also aus k_1 1-Zykeln, k_2 2-Zykeln, …, k_r r-Zykeln. Dabei haben wir

$$k_1 + 2k_2 + +3k_3 + \ldots + rk_r = n.$$

Es gibt n Möglichkeiten der Verteilung von $1, \dots, n$ auf die Zykel, wobei jedoch gleiche Permutationen mit nur anderer Schreibweise der Zykel darunter sind:

- Jeden Zykel der Länge i kann man auf i Weisen rotieren, ohne die Permutation zu verändern
- die k_i Zykel der Länge i kann man untereinander vertauschen, mit $k_i!$ Möglichkeiten

Berücksichtig man dies, ergibt sich als Anzahl der Permutationen einer Konjugationsklasse

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} i^{k_i} k_i!}.$$

konkrete Beispiele:

S_3: 3 Konjugationsklassen: $\{1\}, \{(12), (13), (23)\}, \{(123), (132)\}$

S_4: 5 Konjugationsklassen, tabellarisch mit Repräsentanten:

Repräsentant	π	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
Größe der Konjugationsklasse	$\lvert\pi^{S_4}\rvert$	1	6	8	3	6
Ordnung des Zentralisators	$\lvert C_{S_4}(\pi)\rvert$	24	4	3	8	4

S_5: 7 Konjugationsklassen, tabellarisch mit Repräsentanten:

π	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)	(123)(45)	(12345)
$\lvert\pi^{S_5}\rvert$	1	10	20	15	30	20	24
$\lvert C_{S_5}(\pi)\rvert$	120	12	6	8	4	6	5

Beispiel 3: A_n

A_n ist die *Alternierende Gruppe*, die Gruppe der geraden Permutationen einer n-elementigen Menge, eine Untergruppe von S_n mit $\frac{n!}{2}$ Elementen.

Offensichtlich ist für $x \in A^n$ $\;x^{A_n} \subseteq x^{S_n}$. Die Gleichheit braucht nicht zu gelten, denn beispielsweise ist

$$(123)^{A_3} = \{(123)\} \neq \{(123), (132)\} \in x^{S_3}.$$

Satz 14: Sei $x \in A_n$, $n > 1$. Kommutiert x mit einer ungeraden Permutation in S_n, dann ist $x^{A_n} = x^{S_n}$.

Andernfalls zerfällt x^{S_n} in zwei Konjugationsklassen von A_n gleicher Größe mit Repräsentanten x und $(12)^{-1}x(12)$.

Beweis:

Angenommen, x kommutiert mit $g \in S_n \setminus A_n$. Sei $x^{S_n} \ni y = h^{-1}xh$ mit einem $h \in S_n$. Ist $h \in A_n$, dann ist $y \in x^{A_n}$. Ist $h \notin A_n$, dann ist $gh \in A_n$, und es folgt

$$gx = xg \;\Rightarrow\; x = g^{-1}xg \;\Rightarrow\; y = h^{-1}xh = h^{-1}g^{-1}xgh = (gh)^{-1}x(gh)$$

und $y \in x^{A_n}$. Daher ist $x^{A_n} = x^{S_n}$.

Nun sei angenommen, x kommutiert mit keinem $g \in S_n \setminus A_n$. Dann ist

$$C_{S_n}(x) = C_{A_n}(x).$$

Nach Satz 11 ist

$$\begin{aligned} |x^{A_n}| = |A_n : C_{A_n}(x)| = \frac{1}{2}|S_n : C_{A_n}(x)| &= \frac{1}{2}|S_n : C_{S_n}(x)| \\ &= \frac{1}{2}|x^{S_n}|. \end{aligned}$$

Jede ungerade Permutation h läßt sich in der Form $h = (12)z$ mit $z \in A_n$ schreiben, damit ist

$$h^{-1}xh = z^{-1}(12)^{-1}x(12)z \in \big((12)^{-1}x(12)\big)^{A_n}$$

und

$$\{h^{-1}xh \mid h \in S^n \setminus A_n\} = \big((12)^{-1}x(12)\big)^{A_n}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} x^{S_n} &= \{h^{-1}xh \mid h \in A_n\} \cup \{h^{-1}xh \mid h \in S^n \setminus A_n\} \\ &= x^{A_n} \cup \big((12)^{-1}x(12)\big)^{A_n}. \end{aligned}$$

Dies ist die gewünschte Zerlegung. ■

Bemerkung: an der Zerlegung von x in disjunkte Zykel kann man diese Fälle wie folgt unterscheiden: haben alle Zykel der Zerlegung ungerade und paarweise verschiedene Länge, dann ist $x^{A_n} \neq x^{S_n}$, andernfalls $x^{A_n} = x^{S_n}$.

Beispiel: Konjugationsklassen von A_4

Die Elemente von A_4 sind[6] (1) sowie Permutationen der Zykelstrukturen $(2,2)$ und (3). (12)(34) kommutiert mit (12), einem Zykel gerader Länge, also einer ungeraden Permutation. Nach Satz 14 ist somit

$$(12)(34)^{A_4} = (12)(34)^{S_4} = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Zykelstruktur (3): (123) kommutiert mit keiner ungerade Permutation. Wäre nämlich $\pi(123)\pi^{-1} = (123)$, dann ist nach dem Hilfssatz aus Beispiel 2 $(123) = \big(\pi(1)\pi(2)\pi(3)\big)$, in Frage kommen $(1), (123), (132)$, alle gerade. Nach Satz 14 zerfällt $(123)^{S_4}$ in A_4 in zwei Konjugationsklassen mit Vertretern (123) und $(12)^{-1}(123)(12) = (132)$. Zusammenfassend:

Repräsentant	π	1	(123)	(132)	(12)(34)
Größe der Konjugationsklasse	$\lvert\pi^{A_4}\rvert$	1	4	4	3
Ordnung des Zentralisators	$\lvert C_{A_4}(\pi)\rvert$	12	3	3	4

Beispiel: Konjugationsklassen von A_5

Dies sei nur angegeben:

Repräsentant	π	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
Größe der Konjugationsklasse	$\lvert\pi^{A_5}\rvert$	1	20	15	12	12
Ordnung des Zentralisators	$\lvert C_{A_5}(\pi)\rvert$	60	3	4	5	5

[6] gerade Permutationen, also sind Zykel gerader Länge nicht enthalten

Normalteiler

Ein Zusammenhang zwischen den Normalteilern einer Gruppe und ihrer Konjugationsklassen ist gegeben durch folgenden

Satz 15: Sei H eine Untergruppe von G. H ist genau dann normal in G, wenn H Vereinigung von Konjugationsklassen von G ist.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “ : Angenommen, H ist Vereinigung von Konjugationsklassen von G, dann

$$\forall\, h \in H,\, \forall\, g \in G \quad \Rightarrow \quad g^{-1}hg \in H \quad \Rightarrow \quad g^{-1}Hg \subseteq G \quad \Rightarrow \quad H \lhd G.$$

„ $\Leftarrow$ “ :

$$H \lhd G \quad \Rightarrow \quad \forall\, h \in H,\, \forall\, g \in G: \quad g^{-1}hg \in H \quad \Rightarrow \quad h^G \subseteq H$$
$$\Rightarrow \quad H = \bigcup_{h \in H} h^G. \blacksquare$$

Das Zentrum einer Gruppenalgebra

Nun stellen wir einen Zusammenhang zwischen dem Zentrum

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G \mid zr = rz \;\forall\, r \in \mathbb{C}G\}$$

einer Gruppenalgebra und ihrer Konjugationsklassen her. Bekanntlich ist $Z(\mathbb{C}G)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}G$, und wir bestimmen nun eine Basis für $Z(\mathbb{C}G)$.

Definition: Für die verschiedenen Konjugationsklassen $C_1, \ldots, C_n$ der Gruppe G heißen

$$\overline{C}_i := \sum_{g \in C_i} g \;\; \in \mathbb{C}G$$

die *Klassensummen* von $\mathbb{C}G$.

Satz 16: Die Klassensummen $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_n$ bilden eine Basis von $Z(\mathbb{C}G)$.

Beweis:

$\overline{C}_i \in Z(\mathbb{C}G)$: Sei C_i geschrieben als $\{x_1^{-1}gx_1, \dots, x_r^{-1}gx_r\}$, mit r verschiedenen Konjugierten eines $g \in G$, dann ist

$$\overline{C}_i = \sum_{j=1}^{r} x_j^{-1}gx_j.$$

Für beliebiges $h \in G$ ist dann

$$h^{-1}\overline{C}_i h = \sum_{j=1}^{r} h^{-1}x_j^{-1}gx_jh. \tag{8}$$

Die r Summanden sind allesamt Elemente von C_i und voneinander verschieden, denn

$$h^{-1}x_j^{-1}gx_jh = h^{-1}x_k^{-1}gx_kh \quad \Leftrightarrow \quad x_j^{-1}gx_j = x_k^{-1}gx_k,$$

die Summanden durchlaufen also genau C_i und somit ist

$$\sum_{j=1}^{r} h^{-1}x_j^{-1}gx_jh = \overline{C}_i,$$

zusammen mit (8) ist

$$\forall\, h \in G: \;\; h^{-1}\overline{C}_i h = \overline{C}_i,$$

folglich $\overline{C}_i h = h\overline{C}_i \;\forall\, h \in G$, $\overline{C}_i$ kommutiert mit allen $h \in G$, wegen Linearität dann auch mit allen Elementen von $\mathbb{C}G$, es ergibt sich $\overline{C}_i \in Z(\mathbb{C}G)$.

Lineare Unabhängigkeit: Nach Korollar 9 sind die C_i paarweise disjunkt. Aus $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{C}_j = 0$ folgt daher $\lambda_j = 0 \;\forall\, j$.

Die $\overline{C}_i$ spannen $Z(\mathbb{C}G)$ auf: Sei $Z(\mathbb{C}G) \ni r = \sum_{g\in G} \lambda_g g$ beliebig. Dann ist für $h \in G$ $\;rh = hr$, gleichbedeutend mit $h^{-1}rh = r$,

$$\sum_{g\in G} \lambda_g h^{-1}gh = \sum_{g\in G} \lambda_g g.$$

Es folgt $\lambda_g = \lambda_{h^{-1}gh}$ für jedes $h \in G$, $g \mapsto \lambda_g$ ist konstant auf Konjugationsklassen von G, wir erhalten $r = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overline{C}_j$ mit $\lambda_j = \lambda_{g_j}$ für $g_j \in C_j$.

Literatur

[JL] Gordon James und Martin Liebeck: *Representations and characters of groups*, Cambridge University Press, 1993, Kapitel 11-12